CONCURSUL NAȚIONAL ”PEDAGOGIA MATEMATICII”
ETAPA JUDEȚEANĂ, 08.03.2025
CLASA a 10-a

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 15 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

Problema 1 (autor Raluca Daniela Stoican)

a) Raționalizați numitorul fracției $\frac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}$.

b) Pentru $x=\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{103}+1}$, calculați valoarea expresiei

$$P(x)=x^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\cdot x^{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\cdot x^{\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}}\cdot\ldots\ldots\cdot x^{\frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}}.$$

c) Dacă $a=1, b=2$ calculați valoarea expresiei

$$E(a,b)=\left(a^{\frac{5}{2}}-ab^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}b-b^{\frac{5}{2}}\right):\left[\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)\left(b^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{3}{4}}\right)\right].$$

Soluție:

a) $\frac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}=\frac{4}{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)-\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{4}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=$ ……..**2p**

$=\frac{4\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{4}=\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$ ……………………………….**3p**

b)

$$P(x)=x^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\cdot x^{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\cdot x^{\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}}\ldots\ldots\cdot x^{\frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}}=x^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots..+\frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}}$$

…………………**1p**

Atunci $P(x)=x^{\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\ldots..+\sqrt{102}-\sqrt{103}}{-1}}=x^{\sqrt{103}-1}$ ……………………………..**2p**

Cum $x=\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{103}+1}=\left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\sqrt{103}+1}=2^{\frac{\sqrt{103}+1}{6}}$ ……………………………………**1p**

$\Rightarrow P(x)=x^{\sqrt{103}-1}=\left(2^{\frac{\sqrt{103}+1}{6}}\right)^{\sqrt{103}-1}=2^{\frac{103-1}{6}}=2^{17}$ …………………………………**1p**

c) $E(a,b)=\left(a^{\frac{5}{2}}-ab^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}b-b^{\frac{5}{2}}\right):\left[\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)\left(b^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{3}{4}}\right)\right]=\left(a^2\sqrt{a}-ab\sqrt{b}+ab\sqrt{a}-b^2\sqrt{b}\right):\left(b\sqrt{b}-a\sqrt{a}\right)$

…….**2p**

$E(a,b)=(a+b)\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right):\left(b\sqrt{b}-a\sqrt{a}\right)$, deci $E(a,b)=-(a+b)$……**2p**

$\Rightarrow E(1,2)=-3$……………………………………………….**1p**

Problema 2 (autor Alina Paraschiv)

Arătați că expresia

$$A=\left(\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+....+\frac{1}{\log_x 2^{2024}\cdot\log_x 2^{2025}}\right)-\frac{2024}{2025(\log_x 2)^2}$$

nu depinde de x.

Soluție:

$$A=\left(\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+....+\frac{1}{\log_x 2^{2024}\cdot\log_x 2^{2025}}\right)-\frac{2024}{2025(\log_x 2)^2}$$

$A=\log_2 x\cdot\log_4 x+\log_4 x\cdot\log_8 x+....+\log_{2^{2004}} x\cdot\log_{2^{2005}} x-\dfrac{2024}{2025(\log_x 2)^2}$ …………**4p**

$A=\dfrac{1}{1\cdot 2}(\log_2 x)^2+\dfrac{1}{2\cdot 3}(\log_2 x)^2+......\dfrac{1}{2024\cdot 2025}(\log_2 x)^2-\dfrac{2024}{2025(\log_x 2)^2}$ …………………**4p**

$A=(\log_x 2)^2\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+......+\dfrac{1}{2024}-\dfrac{1}{2025}\right)-\dfrac{2024}{2025(\log_x 2)^2}$ ………………………**4p**

$A=\dfrac{1}{(\log_x 2)^2}\left(1-\dfrac{1}{2025}-\dfrac{2024}{2025}\right)=0$ ……………………………………………………**3p**

Problema 3 (autor Ana Maria Ioniță)

Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2\left[3x^2+(m+5)x+m+5\right]$, $m\in\mathbb{R}$. Pentru ce valori reale ale lui m funcția are domeniul de definiție $D=\mathbb{R}$?

Soluție:

$3x^2+(m+5)x+m+5>0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$ ……………………………………………………… **4p**

$\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$, deci $m^2-2m-35<0$ ……………………………………………………………………… **6p**

$\Delta_m=144$, $m=7$ sau $m=-5$ …………………………………………………………………………… **3p**

$m^2-2m-35<0$ pentru $m\in(-5,7)$ ……………………………………………………………… **2p**

Problema 4

Să se determine numărul real m știind că ecuațiile exponențiale $2^{x+1}-m\cdot 4^x+3=0$ și $3^{x+1}+9^x-18=0$ au o soluție comună.

Soluție:

$3^x \cdot 3 + 3^{2x} - 18 = 0$ **3p**

$3^x = t > 0$, astfel vom avea $t^2 + 3t - 18 = 0$ **2p**

$t = 3$, care convine, sau $t = -6$, care nu convine... **5p**

Ecuațiile au o soluție comună, deci soluția poate fi doar $x = 1$ **2p**

$2^2 - 4m + 3 = 0$ **2p**

$m = \frac{7}{4}$ **1p**